10º FEPEG
FÓRUM ENSINO · PESQUISA EXTENSÃO · GESTÃO
RESPONSABILIDADE SOCIAL: INDISSOCIABILIDADE ENSINO, PESQUISA E EXTENSÃO UNIVERSITÁRIA
Realização: Apoio:
ISSN 1806-549 X

Autor(es): NILSON LUIZ CASTELUCIO BRITO, PEDRO HENRIQUE PEREIRA PINHO, JULIANA MIRANDA CORRÊA DE GUAMÁ

Algoritmo para cálculo da distribuição preditiva do número de usuários no sistema em uma fila M/M/1 com abordagem bayesiana

1- Introdução

Para que uma fila seja formada têm-se a entrada de usuários em um determinado ambiente superior à capacidade que esse ambiente tem de atendê-los de forma imediata. As filas podem ser definidas a partir de suas características que podem ser descritas como: o processo de chegada; a capacidade do sistema; o tempo de serviço; o número de servidores; a população de usuários; a disciplina de atendimento. A nomenclatura sugerida por [2], cuja forma é *A/B/c/k/Z*, sugere que *A* seja a distribuição do tempo entre as chegadas, *B* a distribuição do tempo de serviço, *c* o número de servidores, *k* a capacidade da fila de espera e *Z* a disciplina de atendimento. O modelo clássico Markoviano descreve uma fila do tipo FIFO, *First In First Out*, com chegada exponencial, *M*, serviço exponencial, *M*, 1 servidor para atendimento e capacidade infinita. A otimização de filas auxilia empresas a reduzir custos e melhorar seus serviços de atendimento. O objetivo desse trabalho é apresentar um algoritmo que seja capaz de oferecer o valor da distribuição preditiva, com enfoque bayesiana, do número de clientes de uma fila, sendo ela do tipo *M/M/1*, dispondo-se de dados *a priori* e *a posteriori*.

2- Metodologia

2.1- Filas M/M/1

Presume-se que a fila esteja em equilíbrio e isso implica em ρ, intensidade do tráfego, seja < 1. Sabendo-se que ρ é uma distribuição de Poisson com taxa de chegada λ e tempo de serviço μ. Matematicamente isso implica que: ρ < 1 $\rightarrow \lambda < \mu$, o que confirma o equilíbrio da fila, caso contrário haveria uma "explosão" do sistema, ou seja, a fila cresceria continuamente em tamanho. Dessa forma, o número de usuários, após o equilíbrio, pode ser calculado pela equação de distribuição de probabilidade geométrica:

$$\mathbb{P}(N = n) = p_n = p^n(1-p), 0 < \rho < 1, n \geq 0, \qquad (1)$$

2.2- Inferência Bayesiana

Para fazer inferências sobre ρ, trabalha-se com distribuições *a priori*, $\rho(\theta)$, e a *posteriori*, $\rho(\theta|x)$, sendo eles explicados como: os que são baseados em conhecimentos prévios do comportamento randômico do parâmetro de interesse são dados *a priori* e podem ser tanto subjetivas quanto objetivas; os que são obtidos como amostras através de medições são, portanto, dados a *a posteriori*. A distribuição *a posteriori* de pode ser descrita como:

$$\pi(\theta|x) = \frac{L(\theta,x)\pi(\theta)}{\pi(x)} = \frac{\pi(x|\theta)\pi(\theta)}{\pi(x)} \qquad (2)$$

Tendo em vista a análise de uma amostra do número de usuários no sistema como $x_1, \dots, x_n$, a função de verossimilhança é dada por:

$$L(\overline{x};\rho) = \prod_{i=1}^{n}(1-\rho)\rho^{x_i} = (1-\rho)^n \rho^{\sum_{i=1}^{n} x_i}. \qquad (3)$$

Assumindo que, mesmo que ρ esteja entre 0 e 1, ele esteja mais especificamente entre valores de *a* e *b* de tal forma que 0 < *a* < ρ < *b* < 1, então pode-se assumir que a ρ possui uma distribuição uniforme truncada que pode ser descrita como:

$$\pi(\rho) \propto \rho^{a-1}(1-\rho)^{b-1}, 0 < \rho < 1, a > 0, b > 0.$$

Partindo da combinando das equações (2) e (3), a equação a posteriori pode ser descrita como:

ISSN 1806-549 X

$$\pi_{NC}(\theta|\tilde{x}) = \frac{\Gamma(a+\sum_{i=1}^{n} x_i + n + b)}{\Gamma(a+\sum_{i=1}^{n} x_i)\Gamma(n+b)}\theta^{a+\sum_{i=1}^{n} x_i - 1}(1-\theta)^{n+b-1} \qquad (4)$$

Pode-se entender então que $\prod NC(\theta|\tilde{x}) \sim Beta(a+\sum_{i=1}^{n} x_i; n+b)$, portanto têm-se a função de probabilidade $\prod NC$:

$$\pi_{NC}(\rho|dados) = \begin{cases} \dfrac{1}{B(a+y;n+b)}\rho^{a+y-1}(1-\rho)^{n+b-1}, 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0\,, \qquad caso\ contrário. \end{cases} \qquad (5)$$

Com $y = \sum_{i=1}^{n} x_i$.

Conforme sugere [3] em seu trabalho, tendo $\sum_{i=1}^{n} x_i$ como sendo amostras randômicas de uma distribuição $f(x|\theta)$ que determinam a taxa de entrada de usuários, os parâmetros a e b como dados *a priori*, então a distribuição preditiva *a posteriori* pode ser descrita como:

$$\pi_{NC}(\rho|dados) = \begin{cases} \dfrac{B(a+y+m;n+b+1)}{B(a+y;n+b)}\rho^{a+y-1}(1-\rho)^{n+b-1}, 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0\,, \qquad caso\ contrário. \end{cases} \qquad (6)$$

Com $y = \sum_{i=1}^{n} x_i$.

2.3 Contribuição: cálculo da distribuição

Fazendo:

$$\alpha = a+y, \beta = n+b, B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \qquad (7)$$

Então, pode-se reescrever a equação (6) usando as substituições propostas em (7) para:

$$\frac{\dfrac{\Gamma(\alpha+m)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+m+1}}{\dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}} \qquad (8)$$

Sabendo-se que a função de distribuição $\Gamma(x)$ tem como propriedade: $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$ e sabendo que $\Gamma(.)$ não assume resultado igual a 0, pode-se desenvolver a equação (8) de forma que:

$$\frac{\dfrac{(\alpha+m-1)(\alpha+m-2)\ldots(\alpha+m-m)\Gamma(\alpha)\beta\Gamma(\beta)}{(\alpha+\beta+m+1-1)(\alpha+\beta+m+1-2)\ldots(\alpha+\beta+m+1-m-1)\Gamma(\alpha+\beta)}}{\dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}} \qquad (9)$$

De forma que (9) se torna:

$$\frac{(\alpha+m-1)(\alpha+m-2)\ldots(\alpha+m-m)\beta}{(\alpha+\beta+m+1-1)(\alpha+\beta+m+1-2)\ldots(\alpha+\beta+m+1-m-1)} \qquad (10)$$

O algoritmo que descreve o comportamento da função 10 pode ser descrito como:

ISSN 1806-549 X

resultado ← 1
for i **do** ← 1 até $i < m + 2$ com passo 1
  if $i \neq m + 1$ **then**
    cima ← $(\alpha + m - i)$
  end if
baixo ← $(\alpha + \beta + m + 1 - i)$
resultado← resultado * $\frac{cima}{baixo}$
cima ← 1
end for
resultado = resultado * β

A fim de evitar que o valor calculado venha a se tornar um número muito grande na parte superior e muito grande na parte inferior da fração, o que impossibilitaria o cálculo para alguns valores de *m*, optasse por calcular a divisão da fração a medida que a função vai sendo calculada. Em termos de complexidade em relação ao tempo de execução ele pode ser descrito como um algoritmo de complexidade linear, uma vez que o código se repetirá sempre *m* vezes, portanto recebe a notação $O(m)$.

3- Resultados

Foi utilizada a linguagem Python para a simulação dos dados. Os parâmetros a priori foram sugeridos por [3] como valores para a distribuição Beta (0.6,1.7), ou seja, têm-se a = 0,6 e b = 1,7, e da posteriori foram utilizados os parâmetros sugeridos por [5] com n = 200, $\sum xi = 38$. Portanto, obtêm-se para $m = 0, \ldots, 5$, os valores descritos na tabela 1.

4- Conclusões e Recomendações

Para calcular a distribuição preditiva através da fórmula verifica-se não ser possível a utilização de calculadora ou de um software devido aos valores que a função $\Gamma(.)$ assume. Com o algoritmo ora apresentado, torna-se possível o cálculo da mesma para quaisquer valores obtidos através de simulações. Como trabalhos futuros, sugere-se a utilização do algoritmo para sistemas de filas mais gerais tais como *M/G/*1, bem como para outros valores de parâmetros.

5- Referências

[1] Gross, D. & Harris, C.M. *Fundamentals of queueing theory*. John Wiley & Sons 2nd ed., 1985.
[2] Kendall, D.G. *Stochastic processes occurring in the theory of queues and their analysis by the method of embedded Markov chains* Annals Mathematical Statistics 24, 1985, 338-354.
[3] Choudhury, A.& Borthakur, A. C. *Bayesian inference and prediction in the single server Markovian queue* Metrika 67, 2008, 371- 383.
[4] Cruz, F. R. B. & Almeida, M. *Análise de Desempenho em Filas M/M/1 Usando uma Abordagem Bayesiana* Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, vol. 3,N. 2, 2015.
[5] Nilson L. C. Brito & Celimar R. A. D. Paiva & Fernanda G. B. Mendes *Uma Aplicação da Abordagem Bayesiana em Teoria de Filas* SINAPE, 2016

Tabela 1. Resultados do algoritmo para valores de m= 0,...,5, com os valores de: a= 0,6, b=1,7, n=200 e $\sum xi = 38$.

m	Valor
0	0.839367
1	0.134271
2	0.021944
3	0.003662
4	0.000624
5	0.000108