



Análise Estrutural de Cascas Vias Métodos Elementos Finito (MEF) - Teoria de Kirchhoff

Introdução

As cascas ou membranas são estruturas que possuem uma ideia de leveza e são ultimamente empregados em silos, estádios, auditórios e teatros. Elas são obtidas aplicando uma curvatura em sua área até que ele se deforme, obtendo assim uma estrutura em que sua espessura é suficientemente pequena quando comparada com suas projeções. Para modelação dessas estruturas utilizamos equações diferenciais ordinárias e parciais, (EDOs e EDPs). Porém, quando esses métodos não obtêm grande êxito, utilizamos métodos numéricos. Esses métodos originaram da análise matricial de estruturas, e para a resolução de problemas de cascas utilizaremos o métodos dos elementos finitos que é particularmente, conhecida *elementos infinitesimais do cálculo diferencial*, que teve sua primeira formulação nos anos de 1956, propostas nos trabalhos de Turner, Clough, Martin e Topp. Neste trabalho iremos utilizar a *Teoria de Kirchhoff* para placas, tal teoria, possui a seguintes definições: (i) Todos os pontos que estão contidos em uma reta normal ao plano possuem o mesmo deslocamento transversal; (ii) A tensão normal deve ser desprezada na direção transversal e (iii) após sua deformação das cascas, as retas permanecem estáveis. Os itens.(i) e (ii) seguem a teoria das cascas proposto por Reissner – Mindlin. Temos como objetivos estudar a desratização via métodos dos elementos finitos, analisar essa discretização para problemas de campos de deformações e descolamento em placas curvadas. Além disso, observar que a maioria das deformações ocorre em sólidos elásticos que mudam de forma, ou seja, se deformam quando submetidos a carregamentos.

Material e métodos

Para atingir os objetivos propostos, optou-se pela pesquisa empírica documental e bibliográfica, possibilitando o estudo do tema proposto a partir da análise de diferentes autores e diversas fontes bibliográficas, da qual, surgiram discussões com a comunidade acadêmica. Foram acessadas as bases de dados Scielo (*Scientific Electronic Library Online*), Portal CAPES e Google Scholar, utilizando os seguintes descritores de forma isolada e associada: Teoria de Kirchhoff; discretização e métodos dos elementos finitos.

Com o intuito de desenvolver uma discussão consistentemente teórica, traçando evidências sólidas na apresentação do texto, também serão realizadas buscas científicas nas páginas eletrônicas do departamento de Estrutura da Universidade Federal de Minas Gerias e da Universidade Brasília (UNB).

Resultados e Discussão

Para diagnóstico foi utilizado o modelo de estrutura proposto no trabalho de AJEJE, a partir das análises das Fig. 1A e Fig. 1B observa-se que do problema, temos a seguinte formulação matemática:

A partir das análises e possível observar que plano $y'z'$ é dada como $\theta y' = \frac{\partial w'_0}{\partial y'}$ [eq. 1], analogamente plano $x'z\theta x' = \frac{\partial w'_0}{\partial x'}$ [eq. 2], onde rotações em torno dos planos x_0z_0 e y_0z_0 , respectivamente. Conclui-se que o campo de deformação e dado pela eq.1 e eq.2, onde v', u' e w' , são deslocamento na direção x', y' e z' . E obedecem às seguintes equações abaixo.

$$v'(x', y', z') = v'_0(x', y') - z'_0 \theta_y(x', y') = v'_0(x', y') - z'_0 \frac{\partial w'_0(x', y')}{\partial y'} \quad [\text{Eq. 3}]$$

$$u'(x', y', z') = u'_0(x', y') - z'_0 \theta_x(x', y') = u'_0(x', y') - z'_0 \frac{\partial w'_0(x', y')}{\partial x'} \quad [\text{Eq.4}]$$



$$w'(x', y', z') = w'_0(x', y') \quad [\text{Eq.5}]$$

Onde u' , v' e w' são os deslocamentos em direção aos eixos x' , y' e z' . Além disso devido a dependência entre as rotações θ_y , θ_x e o deslocamento w'_0 , podemos descrever o vetor ponto médio como:

$$u' = \begin{Bmatrix} u'_0 \\ v'_0 \\ w'_0 \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u'_0 \\ v'_0 \\ w'_0 \\ \frac{\partial w'_0}{\partial x'} \\ \frac{\partial w'_0}{\partial y'} \end{Bmatrix} \quad [\text{Eq.6}]$$

A flexão que ocorrem nas placas, quando modeladas possui derivadas de segunda ordem nas integrais de princípios dos trabalhos virtuais (PTV), onde é formulado quando se aplica uma carga distribuída t' e cargas concentradas p'_i obtemos a seguinte expressão.

$$\iiint \delta \epsilon'^T \sigma' dV = \iint \delta u'^T t' dA + \sum_i \delta u'^T t'_i \quad [\text{Eq.7}]$$

Onde V e A são volume e area da superfície, e as grandezas estão referidas a x', y', z' ; $\delta u'$. Já a discretização via metodos dos elementos finitos e dado pela expressão na qual se utiliza o mesmo número de nós.

$$u' = \sum_{i=1}^n N_i d'^{(c)}_i = [N_1, N_2, \dots, N_n] \begin{Bmatrix} d1'^{(c)} \\ d2'^{(c)} \\ \vdots \\ dn'^{(c)} \end{Bmatrix} = N d'^{(c)} \quad [\text{Eq.8}]$$

$$u' = \begin{Bmatrix} u'_0 \\ v'_0 \\ w'_0 \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u'_0 \\ v'_0 \\ w'_0 \\ \frac{\partial w'_0}{\partial x'} \\ \frac{\partial w'_0}{\partial y'} \end{Bmatrix}, d'^{(c)}_i = \begin{Bmatrix} u'_{0i} \\ v'_{0i} \\ w'_{0i} \\ \left(\frac{\partial w'_{0i}}{\partial x'}\right)_i \\ \left(\frac{\partial w'_{0i}}{\partial y'}\right)_i \end{Bmatrix} \quad [\text{Eq.9}]$$

$$N_i = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_i & \bar{P}_i & \bar{P}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i^m & 0 \\ 0 & N_i^f \end{bmatrix} \quad [\text{Eq.10}]$$

Assim temos que N_i^m e a matriz de funções de classe C_0 do nó i do estado plano de tensões, já N_i^f e a matriz de funções de classe C_1 do nó i dos polinômios $P_i, \bar{P}_i, \bar{P}_i$ correspondendo ao elemento de placa de Kirchhoff. Para análise da estrutura foi utilizado o software SAP 2000, e a partir da análise, foi possível verificar, analisando a Fig.1C, que as maiorias das deformações ocorrem na região de apoio, pois são lá que as maiores cargas são transmitidas para estrutura, e para melhorar esses resultados e necessário aumentar os números de nós da estrutura.

Conclusão/Conclusões/Considerações finais

A partir da análise da estrutura foi possível verificar que as cascas sofrem inúmeros esforços que resultam na sua deformação e as tensões são maiores em seu centro e apoios. Uma solução para esses problemas seria aumentar a espessura da chapa. Outra solução que se mostra satisfatória para peças de concreto armado, é utilizar um concreto de maior resistência (f_{ck}). Para obter melhores resultados, é necessário aumentar os números de nós das estruturas, pois a partir disso e possível obter dados mais eficientes.



Referências

ALVES, A. R.S., Análise estrutural de cascas via elementos finitos em concreto armado, Brasil. **Revista da Graduação**, v.4, n.2, nov. 2011.

AJEJE, F.H., **ABORDAGEM ORIENTADA A OBJETOS PARA IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DE ELEMENTOS FINITOS DE CASCAS PLANOS**. TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO (MESTRADO) - Universidade Federal de Minas Gerais, Minas Gerais, 2009.

COSTA, D.I.G., **Nova Formulação do Método dos Elementos de Contorno Para Associação de Placas Espessas**. Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado) - Universidade de Brasília, Brasília, 2014.

SILVA, R.P. **Implementação de Solução Elementos – por – Elemento em Ambiente Distribuído para o Método dos Elementos Finitos**. Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Minas Gerais, 1993.

TIMOSHENKO, S. E WOINOWSKY-KRIEGER, S. **Theory of Plates and Shells**, 2ndEdition. McGraw-Hill Book Co. Inc., New York-NY, 1959.

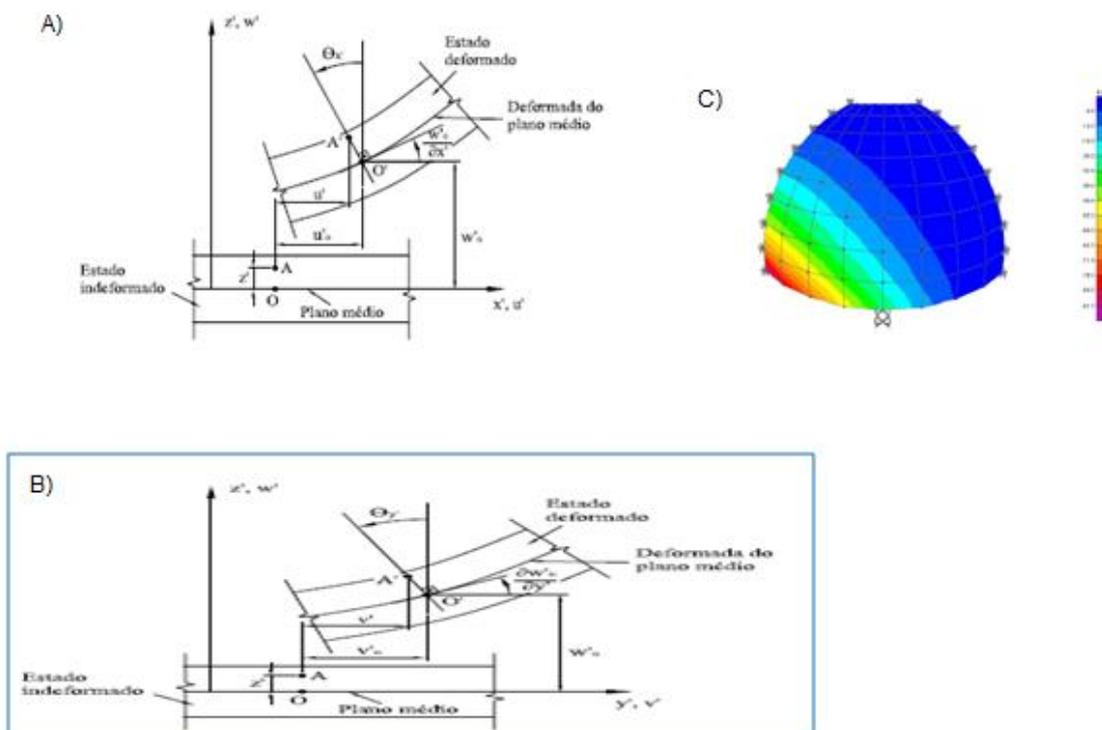


Fig.1A Mostra os deslocamentos de um ponto de uma casca plana, nas direções dos eixos locais x' e z' . Na **Fig.1B** temos os deslocamentos de um ponto de uma casca plana, nas direções dos eixos locais y' e z' segundo a teoria de Kirchhoff e a **Fig. 1C** representa deslocamentos u obtido a partir da análise no SAP2000.

Fonte: http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0370-44672011000500003