



Autor(es): JULIANA GUIMARÃES CANÇADO, VALDOMIRO ROCHA, WARLEY FERREIRA DA CUNHA,
WARLEY MENDES BATISTA, SEBASTIÃO ALVES DE SOUZA

Centros Fracamente Persistentes

Introdução

Apresentamos equações diferenciais polinomiais que tenham a origem como centro fracamente persistente, e não somente persistente, pois se assim o fosse, coincidiriam com as listadas nos Teoremas principais **A**, **B** ou **C** de [1]. Assim, dada a equação diferencial $\dot{z} = iz + F_n(z, \bar{z})$ a origem é um centro fracamente persistente se é um centro para

$$\dot{z} = iz + u F_n(z, \bar{z}), \forall u \in \mathbb{R}.$$

Material e métodos

Pesquisa bibliográfica de natureza qualitativa.

Resultados e discussão

Um foco fraco para uma equação diferencial analítica autônoma planar pode ser escrito como:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + P(x, y) = -y + \sum_{k=2}^n P_k(x, y) \\ \dot{y} = x + Q(x, y) = x + \sum_{k=2}^n Q_k(x, y) \end{cases} \quad (1)$$

onde P_k e Q_k são polinômios homogêneos de grau k . Usando a mudança de variáveis, $z = x + iy$, temos a seguinte definição.

Definição 1. Dada a equação diferencial $\dot{z} = iz + F(z, \bar{z})$, dizemos que:

- A origem é um centro persistente se ela é um centro para $\dot{z} = iz + \lambda F(z, \bar{z}), \forall \lambda \in \mathbb{C}$.
- A origem é um centro fracamente persistente se é um centro para $\dot{z} = iz + u F(z, \bar{z}), \forall u \in \mathbb{R}$.

A seguir, apresentamos sem demonstração a proposição que possibilitou encontrar exemplos de equações diferenciais que possuem um centro fracamente persistente na origem.

Proposição 2. Considere a equação diferencial $\dot{z} = iz + F_n(z, \bar{z})$, (2) onde F_n é um polinômio homogêneo de grau n , e defina $S_n(\theta) = e^{-i\theta} F_n(e^{i\theta}, e^{-i\theta})$. Se existir $s \in \mathbb{R}$ tal que $\text{Re}(sS'(\theta)i + S_n(\theta)) \equiv 0$, então a origem é um centro, além disso, a equação tem integral primeira do tipo Darboux, ou seja, integral primeira algébrica. A partir desta proposição, enunciaremos os resultados principais, cujas demonstrações encontra-se em [1].

Teorema 3. A equação diferencial

$$\dot{z} = iz + Az^2 + Bz\bar{z}, \quad (3)$$

onde $A, B \in \mathbb{C}$, $\text{Im}(\bar{A}B) = 0$ e $A \neq B$, possui um centro fracamente persistente na origem.



Teorema 4. A equação diferencial

$$\dot{z} = iz + Dz^3 + Fz\bar{z}^2, \quad (4)$$

onde $D, F \in \mathbb{C}$, $\text{Im}(\overline{D}F) = 0$ e $D \neq F$, possui um centro fracamente persistente na origem.

A seguir generalizaremos a expressão dada na Proposição 2 e que tem nos ajudado encontrar equações diferenciais que tem a propriedade de ter um centro fracamente persistente na origem.

Seja $F_n(z, \bar{z}) = \sum_{k+l=n} A_{kl} z^k \bar{z}^l$, onde $A_{kl} \in \mathbb{R}$. Como,

$$S_n(\theta) = e^{-i\theta} F_n(e^{i\theta}, e^{-i\theta}) = \sum_{k+l=n} A_{kl} e^{-i(k-l-1)\theta},$$

derivando obtemos $S'_n(\theta) = \sum_{k+l=n} A_{kl} i(k-l-1) e^{-i(k-l-1)\theta}$.

Sendo assim, a expressão da Proposição 2 é dada por

$$\begin{aligned} \text{Re}(sS'_n(\theta)i + S_n(\theta)) &= \frac{1}{2} [sS'_n(\theta)i + S_n(\theta) + \overline{sS'_n(\theta)i + S_n(\theta)}] \\ &= \frac{1}{2} \left[-s \left(\sum_{k+l=n} A_{kl} (k-l-1) e^{i(k-l-1)\theta} \right) + \sum_{k+l=n} A_{kl} e^{i(k-l-1)\theta} - \right. \\ &\quad \left. -s \left(\sum_{k+l=n} A_{kl} (k-l-1) e^{-i(k-l-1)\theta} \right) + \sum_{k+l=n} A_{kl} e^{-i(k-l-1)\theta} \right] \\ &\equiv 0. \end{aligned}$$

Sendo assim, generalizamos os Teoremas 3 e 4, com o seguinte teorema:

Teorema 5. A equação diferencial

$\dot{z} = iz + F_n(z, \bar{z}) = iz + \sum_{k+l=n} A_{kl} z^k \bar{z}^l$, onde $A_{kl} \in \mathbb{C}$. E seja

$$S_n(\theta) = e^{-i\theta} F_n(e^{i\theta}, e^{-i\theta}) = \sum_{k+l=n} A_{kl} e^{-i(k-l-1)\theta}.$$

Temos que, as equações diferenciais polinomiais planares a seguir possuem a propriedade de ter um centro fracamente persistente na origem.

(a) para n par, temos m casos

$$\begin{aligned} 1^0) \dot{z} &= iz + A_{k,0} z^k + A_{1,k-1} z \bar{z}^{k-1}, \\ 2^0) \dot{z} &= iz + A_{k-1,1} z^{k-1} \bar{z} + A_{2,k-2} z^2 \bar{z}^{k-2}, \\ 3^0) \dot{z} &= iz + A_{k-2,2} z^{k-2} \bar{z}^2 + A_{3,k-3} z^3 \bar{z}^{k-3}, \\ &\vdots \end{aligned}$$



$$\vdots$$

$$(m-1)^0) \dot{z} = iz + A_{\frac{k}{2}+2, \frac{k}{2}-2} z^{\frac{k}{2}+2} \bar{z}^{\frac{k}{2}-2} + A_{\frac{k}{2}-1, \frac{k}{2}+1} z^{\frac{k}{2}-1} \bar{z}^{\frac{k}{2}+1},$$

$$m^0) \dot{z} = iz + A_{\frac{k}{2}+1, \frac{k}{2}-1} z^{\frac{k}{2}+1} \bar{z}^{\frac{k}{2}-1} + A_{\frac{k}{2}, \frac{k}{2}} z^{\frac{k}{2}} \bar{z}^{\frac{k}{2}}.$$

(b) para n ímpar, temos m casos

$$1^0) \dot{z} = iz + A_{k,0} z^k + A_{1,k-1} z \bar{z}^{k-1},$$

$$2^0) \dot{z} = iz + A_{k-1,1} z^{k-1} \bar{z} + A_{2,k-2} z^2 \bar{z}^{k-2},$$

$$3^0) \dot{z} = iz + A_{k-2,2} z^{k-2} \bar{z}^2 + A_{3,k-3} z^3 \bar{z}^{k-3},$$

$$\vdots$$

$$(m-1)^0) \dot{z} = iz + A_{\frac{(k+1)}{2}+2, \frac{(k-1)}{2}-2} z^{\frac{(k+1)}{2}+2} \bar{z}^{\frac{(k-1)}{2}-2} + A_{\frac{(k-1)}{2}-1, \frac{(k+1)}{2}+1} z^{\frac{(k-1)}{2}-1} \bar{z}^{\frac{(k+1)}{2}+1},$$

$$m^0) \dot{z} = iz + A_{\frac{(k+1)}{2}+1, \frac{(k-1)}{2}-1} z^{\frac{(k+1)}{2}+1} \bar{z}^{\frac{(k-1)}{2}-1} + A_{\frac{(k-1)}{2}, \frac{(k+1)}{2}} z^{\frac{(k-1)}{2}} \bar{z}^{\frac{(k+1)}{2}}.$$

onde

$$m = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{n-1}{2}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

é o número de casos.

Em [1], encontra-se com mais detalhes, a formação dos coeficientes A_{kl} , onde foi feito passo a passo, o fato é que este teorema, generaliza os dois anteriores, nos fornecendo vários exemplos de equações diferenciais que possuem a propriedade de ter um centro fracamente na origem.

Conclusão

Acreditamos que o problema de procurar, seja por centros persistentes ou fracamente persistentes em outras famílias de equações diferenciais não ajudará a entender melhor a estrutura de todos os centros, por isto, os Teoremas listados acima, não tem o propósito de catalogar todos os centros fracamente persistentes que existem, mas sim, exemplificar esta categoria de centros.

Referências bibliográficas

[1] ROCHA, VALDOMIRO. **Centros Persistentes**. 2010. 69 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Exatas e da Terra), Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2010.